نعرف العلاقة

$$\cdot : R \times Der(A) \longrightarrow Der(A)$$

$$(\alpha, d) \longrightarrow \alpha \cdot d$$

حيث

$$\alpha d : A \longrightarrow A$$

اثبت أن αd تطبيق اشتقاق (وظيفة)

إن الثنائية $(+)$ $Der(d)$ مع العملية الخارجية $(\cdot)$ تشكل معدولة

$$\forall \lambda \in R \quad \forall d_1, d_2 \in Der(d)$$

نثبت

$$\lambda(d_1 + d_2) = \lambda d_1 + \lambda d_2$$

تطبيق اشتقاق   تطبيق اشتقاق

$$\forall x \in A ; (\alpha d)(x) = \alpha d(x)$$

$$\lambda(d_1 + d_2)(x) = \lambda(d_1 + d_2)(x) = \lambda[d_1(x) + d_2(x)]$$

$$= \lambda d_1(x) + \lambda d_2(x)$$

$$= (\lambda d_1)(x) + (\lambda d_2)(x)$$

$$= (\lambda d_1 + \lambda d_2)(x)$$

$$\Rightarrow \lambda(d_1 + d_2) = \lambda d_1 + \lambda d_2$$

بنفس الطريقة نتحقق من جميع شروط المعدولة

تمهيدية :

لتكن A جبرة فوق الحلقة التبديلية الواحدية R ولنفرض أن $d_1, d_2 \in Der(A)$ عندئذ العلاقة : $[d_1, d_2] : A \longrightarrow A$ المعرفة بالشكل الآتي

$$[d_1, d_2] = d_1 \circ d_2 - d_2 \circ d_1$$

هي تطبيق اشتقاق على A

البرهان

لاحظ أن $[d_1, d_2]$ تطبيق من A إلى

$\forall x, y \in A$ ، $[d_1, d_2](x+y) = (d_1 d_2 - d_2 d_1)(x+y)$

$= d_1 d_2 (x+y) - d_2 d_1 (x+y)$

$= d_1(d_2(x+y)) - d_2(d_1(x+y))$

$= d_1(\underbrace{d_2(x) + d_2(y)}_{\in A}) - d_2(d_1(x) + d_1(y))$

$= d_1(d_2(x)) + d_1(d_2(y)) - d_2(d_1(x)) - d_2(d_1(y))$

$= d_1 d_2 (x) + d_1 d_2 (y) - d_2 d_1 (x) - d_2 d_1 (y)$

$= (d_1 d_2 - d_2 d_1)(x) + (d_1 d_2 - d_2 d_1)(y)$

$= [d_1, d_2](x) + [d_1, d_2](y)$

∴ تحقق الشرط

$\forall \lambda \in R$ ، $(\lambda [d_1, d_2])(x) = (\lambda [d_1, d_2])(x)$

$= \lambda (d_1 d_2 - d_2 d_1)(x)$

$= \lambda [(d_1 d_2)(x) - (d_2 d_1)(x)]$

$= \lambda d_1 d_2 (x) - \lambda d_2 d_1 (x)$

$= (\lambda (d_1 d_2))(x) - (\lambda (d_2 d_1))(x)$

$= ~~(\lambda (d_1 d_2) - \lambda (d_2 d_1))(x)~~$

$= \lambda d_1 (d_2(x)) - \lambda d_2 (d_1(x))$

$= d_1(\lambda d_2(x)) - d_2(\lambda d_1(x))$

$= d_1(d_2(\lambda x)) - d_2(d_1(\lambda x))$

$$= d_1 d_2(\lambda x) - d_2 d_1(\lambda x)$$
$$= (d_1 d_2 - d_2 d_1)(\lambda x)$$
$$= [d_1, d_2](\lambda x)$$

$$[d_1, d_2](x.y) = (d_1 d_2 - d_2 d_1)(x.y)$$
$$= d_1 d_2(x.y) - d_2 d_1(x.y)$$
$$= d_1(d_2(x.y)) - d_2(d_1(x.y))$$
$$= d_1(d_2(x)y + x.d_2(y)) - d_2(d_1(x)y + x d_1(y))$$
$$= d_1(d_2(x).y) + d_1(x d_2(y)) - d_2(d_1(x).y) - d_2(x d_1(y))$$
$$= d_1(d_2(x)).y + d_2(x)d_1(y) + d_1(x)d_2(y) + x d_1(d_2(y)) - d_2(d_1(x))y - d_1(x)d_2(y) - d_2(x)d_1(y) - x d_2(d_1(y))$$
$$= d_1.d_2(x).y - d_2.d_1(x).y + x\, d_1.d_2(y) - x\, d_2.d_1(y)$$
$$= (d_1 d_2(x) - d_2 d_1(x)).y + x(d_1.d_2(y) - d_2 d_1(y))$$
$$= (d_1 d_2 - d_2 d_1)(x).y + x(d_1 d_2 - d_2 d_1)(y)$$
$$= [d_1, d_2](x).y + x[d_1, d_2](y)$$

ومنه فإن العملية $[\,,\,]$ تحقق اشتقاق

مبرهنة:

ليكن A جبراً غير تجميعي على الحلقة التبديلية والواحدية R ، الثلاثية $(Der(A), +, [\,,\,])$ تشكل جبراً غير تجميعي على الحلقة R

البرهان:

وجدنا أن الثنائية $(Der(A), +)$ موديول على R

نعرف عملية داخلية ثنائية (داخلية)

$$[\ ,\ ] : Der(A) \times Der(A) \longrightarrow Der(A)$$

$$(d_1, d_2) \longrightarrow [d_1, d_2]$$

نبرهن ان العلاقة $[\ ,\ ]$ تطبيق

$$\forall (d_1, d_2), (d_1', d_2') \in Der(A) \times Der(A)$$

حيث

$$(d_1, d_2) = (d_1', d_2')$$

$$\Rightarrow d_1 = d_1' \quad , \quad d_2 = d_2'$$

وبالتالي فإن $x \in A$

عوضنا $d_1(x) = d_1'(x)$ ، $d_2(x) = d_2'(x)$

$$d_1(d_2(x)) = d_1(d_2'(x))$$

$$d_1 d_2(x) = d_1 d_2'(x) \quad \text{———} \quad \star$$

$$d_2(d_1(x)) = d_2(d_1'(x))$$

$$= d_2 d_1(x) = d_2 d_1'(x) \quad \text{———} \quad \star\star$$

اذا نطرح [illegible] $d_2 d_1(x)$ [illegible] $\star$

$$d_1 d_2(x) - d_2 d_1(x) = d_1 d_2'(x) - d_2 d_1'(x)$$

$$(d_1 d_2 - d_2 d_1)(x) = (d_1 d_2' - d_2 d_1')(x)$$

$$[d_1, d_2](x) = (d_1' d_2' - d_2' d_1')(x)$$

$$[d_1, d_2](x) = [d_1', d_2'](x)$$

$$\Rightarrow [d_1, d_2] = [d_1', d_1']$$

وعليه $[\ ,\ ]$ تطبيق

لتكن $d_1, d_2, d_3 \in Der(A)$ عندئذ $\forall x \in A$ فإن

$$[d_1, d_2 + d_3] = [d_1, d_2] + [d_1, d_3]$$

$\forall x \in A \; ; \; [d_1, (d_2+d_3)](x) = (d_1 (d_2+d_3)) - ((d_2+d_3) d_1)(x)$

$= d_1(d_2+d_3)(x) - (d_2+d_3) d_1(x)$

$= d_1((d_2+d_3)(x)) - (d_2+d_3)(d_1(x))$

$= d_1(d_2(x) + d_3(x)) - d_2(d_1(x)) - d_3(d_1(x))$

$= d_1(d_2(x)) + d_1(d_3(x)) - d_2(d_1(x)) - d_3(d_1(x))$

$= [d_1, d_2](x) + [d_1, d_3](x)$

$= ([d_1, d_2] + [d_1, d_3])(x)$

$\Rightarrow [d_1, d_2+d_3] = [d_1, d_2] + [d_1, d_3]$

بنفس الطريقة يمكن اثبات ان الضرب توزيعي على الجمع من اليمين

$\forall \lambda \in R \quad d_1, d_2 \in Der(A)$

لنبرهن أن .

$\lambda[d_1, d_2] = [\lambda d_1, d_2] = [d_1, \lambda d_2]$

للبرهان على ذلك

$\lambda[d_1, d_2](x) = \lambda([d_1, d_2](x))$

$= \lambda(d_1 d_2 - d_2 d_1)(x)$

$= \lambda(d_1 d_2(x) - d_2 d_1(x))$

$= \lambda(d_1 d_2(x)) - \lambda(d_2 d_1(x))$

$= \lambda(d_1(d_2(x))) - \lambda(d_2(d_1(x)))$

$= \lambda(d_1(d_2(x))) - d_2(\lambda d_1(x))$

$= \lambda d_1(d_2(x)) - d_2(\lambda d_1)(x)$

$= ((\lambda d_1) d_2 - d_2 (\lambda d_1))(x)$

$= [\lambda d_1, d_2](x)$

$\Rightarrow \lambda [d_1, d_2] = [\lambda d_1, d_2]$

$\Leftarrow Der(A)$ تشكل جبرة فوق الحلقة R

مبرهنة:

لتكن A جبرة فوق الحلقة R و $d \in Der(A)$ و $n \geq 1$ عدد صحيح عندئذ

$\forall x, y \in A$;

$$d^n(x.y) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} d^r(x) \, d^{n-r}(y)$$

توافقية

البرهان: بالاستقراء حسب n

من أجل n = 1 يكون

$$\sum_{r=0}^{1} \binom{1}{r} d^r(x) \, d^{1-r}(y) = x \, d(y) + d(x).y = d(x.y)$$ الطرف الأيسر

نفرض صحة المساواة من أجل k أي نفرض:

$$d^k(x.y) = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} d^r(x) \, d^{k-r}(y)$$

لنبرهن أن المساواة صحيحة من أجل k+1

$$d^{k+1}(x.y) = d . d^k(x.y) = d(d^k(x.y))$$

$$= d\left(\sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} d^r(x) . d^{k-r}(y)\right)$$

$$= \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} d\left(d^r(x) . d^{k-r}(y)\right)$$

$$= \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} \left[d^{r+1}(x) . d^{k-r}(y) + d^r(x) . d^{k-r+1}(y)\right]$$

$$= \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} d^{r+1}(x) \cdot d^{k-r}(y) + \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} d^{r}(x)\, d^{k-r+1}(y)$$

$$= d^{k+1}(x) \cdot y + \sum_{r=0}^{k-1} \binom{k}{r} d^{r+1}(x)\, d^{k-r}(y) + x \cdot d^{k+1}(y)$$

$$+ \sum_{r=1}^{k} \binom{k}{r} d^{r}(x)\, d^{k-r+1}(y)$$

$$= \left(d^{k+1}(x) \cdot y + x \cdot d^{k+1}(y) \right) + \sum_{r=0}^{k-1} \binom{k}{r} d^{r+1}(x)\, d^{k-r}(y)$$

$$+ \sum_{r=1}^{k} \binom{k}{r} d^{r}(x)\, d^{k-r+1}(y)$$

نجري في المجموع الأول تغيراً في المتغير لإعادة كتابته على الشكل $t = r+1$ فيكون $r = t-1$

$$\sum_{r=0}^{k-1} (\text{الأول}) = \sum_{t=1}^{k} \binom{k}{t-1} d^{t}(x)\, d^{k-t+1}(y)$$

نستبدل t بـ r

$$\sum_{r=0}^{k-1} (\text{الأول}) = \sum_{r=1}^{k} \binom{k}{r-1} d^{r}(x)\, d^{k-r+1}(y)$$

نستبدل المجموع الأول بما يساويه

$$d^{n}(x \cdot y) = \left(d^{k+1}(x) \cdot y + x\, d^{k+1}(y) \right) + \sum_{r=1}^{k} \left[\binom{k}{r-1} + \binom{k}{r} \right] d^{r}(x)\, d^{k-r+1}(y)$$

$$\binom{k}{r-1} + \binom{k}{r} = \frac{k!}{(r-1)!\,(k-r+1)!} + \frac{k!}{r!\,(k-r)!}$$

$$= \frac{k!}{(r-1)!\,(k-r+1)(k-r)!} + \frac{k!}{r\,(r-1)!\,(k-r)!}$$

$$= \frac{k!}{(r-1)!\,(k-r)!} \left[\frac{1}{k-r+1} + \frac{1}{r} \right]$$ نوحد المقامات

$$\frac{k!}{(r-1)!\,(k-r)!}\left[\frac{r+k-r+1}{r\,(k-r+1)}\right]=\frac{k!}{(r-1)!\,(k-r)!}\left[\frac{k+1}{r\,(k-r+1)}\right]$$

$$=\frac{(k+1)!}{r!\,(k-r+1)!}=\binom{k+1}{r}$$

$$d^{n}(x.y)=\left(d^{k+1}(x).y+x\,d^{k+1}(y)\right)+\sum_{r=1}^{k}\binom{k+1}{r}d^{r}(x)\,d^{k-r+1}(y)$$

$$=d^{k+1}(x).y+\sum_{r=0}^{k}\binom{k+1}{r}d^{r}(x)\,d^{k-r+1}(y)$$

$$=\sum_{r=0}^{k+1}\binom{k+1}{r}d^{r}(x)\,d^{k-r+1}(y)$$

ومنه العلاقة صحيحة